Capitolul al V-lea

Multiplicități şi distribuții de multiplicitate

V.1. Noțiuni fundamentale

Printre mărimile fizice de interes în cunoaşterea dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste şi în punerea în evidență a unor fenomene "exotice" şi tranziții de fază în materia nucleară se numără ***multiplicitatea particulelor de diferite tipuri*** generate în astfel de ciocniri şi ***distribuțiile de multiplicitate asociate***. Trebuie remarcat faptul că în cazul acestei mărimi fizice obținerea informației experimentale se poate face, în general, relativ *direct şi fără ca ea să fie afectată de erori experimentale mari*.

Multiplicitatea se defineşte ca numărul de particule secundare de un anumit tip produse într-un eveniment de un tip bine stabilit**. Distribuția de multiplicitate** dă repartizarea particulelor secundare de tipuri date produse în categorii de evenimente care satisfac condiții date. În general, *distribuția de multiplicitate* reflectă ***geometria ciocnirii***, iar *momentele asociate distribuției de multiplicitate* reflectă ***dinamica ciocnirii*** [4,5,20,21]. Acest fapt le face extrem de utile în studiul ciocnirilor nucleare relativiste, ciocniri în care între geometria ciocnirii şi dinamica ciocnirii există legături extrem de profunde [1-5,20-25].

Distribuția de multiplicitate se poate defini în termeni specifici teoriei probabilităților. Se consideră o ciocnire semiexclusivă de tipul:

$$A_P + A_T \rightarrow n_1 a_1 + n_2 a_2 + ... + n_m a_m + X \quad . \quad (II.1)$$

Distribuția de multiplicitate corespunzătoare se poate defini ca fiind următoarea distribuție de probabilitate:

$$P = \{p_{n_1 n_2 ... n_2}(s; A_P, A_T; a)\} \quad , \quad (II.2)$$

unde

$$p_{n_1 n_2 ... n_m} = \frac{\sigma_{n_1 n_2 ... n_m}(s; A_P, A_T; a)}{\sum\limits_{n_1, n_2, ..., n_m} \sigma_{n_1 n_2 ... n_m}(s; A_P, A_T; a)} \quad , \quad (II.3)$$

cu $\sigma_{n_1 n_2 ... n_m}(s; A_P, A_T; a)$ secțiunea eficace parțială.

Aici

$$\sigma(s; A_P, A_T; a) = \sum_{n_1 n_2 ... n_m} \sigma_{n_1 n_2 ... n_m}(s; A_P, A_T; a) \quad , \quad (II.4)$$

este secțiunea eficace totală.

Este satisfăcută condiția de normare pentru distribuția de probabilitate *P*:

$$\sum_{n_1, n_2 ... n_m} p_{n_1 n_2 ... n_m}(s; A_P, A_T; a) = 1 \quad , \quad (II.5)$$

Așa cu s-a demonstrat în diferite lucrări [21,26-28], prin trecerea la distribuții de probabilitate nu se pierde informație asupra structurii în multiplicități, iar secțiunile eficace care intervin în relațiile de definiție sunt determinate univoc până la un factor dependent de energie, *f(s).* Acest factor este comun pentru toate secțiunile implicate, pentru o ciocnire dată [27].

În termenii teoriei probabilităților distribuției de multiplicitate îi pot fi asociați diferiți **parametrii fenomenologici**, anume: ***momentele și cumulanții***. Folosirea lor este extrem de utilă în obținerea de informații asupra dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste și relevarea unor fenomene noi în materia nucleară formată în aceste ciocniri. Unul dintre momentele de interes ale distribuției de multiplicitate este *momentul de ordinul I*, cunoscut și ca ***multiplicitate medie***. Un alt moment important - mai ales în contextul definirii distribuțiilor de multiplicitate în termeni specifici teoriei probabilităților - *<u>este momentul de ordinul 0</u>*. El reprezintă *aria de sub curbă* și este folosit adesea pentru normare. Alături de <u>*multiplicitatea medie*</u> se pot folosi, pentru studierea dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste, ***multiplicitatea modală*** şi ***multiplicitatea mediană***. ***Multiplicitatea modală*** sau ***modul*** *unei distribuții de multiplicitate,* M_o*,* dă *poziția maximului distribuției* respective (multiplicitatea cu frecvența de apariție cea mai mare). ***Multiplicitatea mediană****,* M_d, se defineşte prin relația următoare: $\sum_{n<M_d} \sigma_n = \sum_{n>M_d} \sigma_n$. Ea dă *multiplicitatea* - pentru un număr impar de valori - sau *perechea de multiplicități* - pentru un număr par de valori - *pentru care ariile de sub curbă, situate la stânga sa* (valori mai mici ale multiplicității decât multiplicitatea mediană), respectiv, *la dreapta sa* (valori mai mari ale multiplicității decât multiplicitatea mediană) *sunt egale.* Aici, σ_n reprezintă secțiunea eficace parțială.

Clasificarea momentelor se poate face în <u>*momente ordinare (simple) şi momente factoriale*</u>. Momentele ordinare se clasifică după punctul în jurul căruia se face medierea. *Astfel, dacă punctul este ales arbitrar (*n_a*) avem* <u>momente ordinare necentrale</u> *(*m'_i*). Dacă acest punct este chiar valoarea medie a multiplicității (*$<n>$*) avem* <u>momente ordinare centrale</u> *(*m_i*).* Relațiile de definiție, experimentale, sunt următoarele [20,21,26-28]:

$$m'_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{(n_j - n_a)^i}{N} \quad , \quad (II.6)$$

$$m_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{(n_j - <n>)^i}{N} \quad , \quad (II.7)$$

Cele două tipuri de momente ordinare pot fi deduse unul din celălalt folosind următoarea relație de legătură:

$$m_i = \sum_{j=1}^{i} C_i^j m'_{i-j} (-m'_1)^i \quad , \quad (II.8)$$

Pentru momentele factoriale se foloseşte următoarea relație de definiție:

$$F_k = <(n)_k> = \sum_{n>k}^{N} (n)_k p_n = \sum_{n>k}^{N} [n(n-1)...(n-k+1)] p_n \quad . \quad (II.9)$$

Momentele factoriale sunt integrale ale secțiunilor eficace inclusive [21,26-28].

Pentru cele trei tipuri de momente definite anterior se pot introduce <u>*funcții generatoare de momente*</u> *specifice, G(z).* Astfel, pentru *momentele ordinare necentrale* *funcția generatoare asociată* este de forma $G(e^t)$, iar pentru *momentele ordinare centrale* se folosește o *funcție generatoare* de forma următoare: $e^{-<n>t}G(e^t)$. În cazul *momentelor factoriale funcția generatoare asociată* este de forma $G(t+1)$. Pentru toate aceste funcții parametrul t este real.

Relațiile de definiție pentru cele trei tipuri de momente, folosind funcțiile generatoare de momente, se vor scrie astfel:

$$m'_i = <n^i>' = \left. \frac{d^i G(e^t)}{dt^i} \right|_{t=0} \quad , \quad (II.10)$$

$$m_i = <n^i> = \left. \frac{d^i [e^{-<n>t} G(e^t)]}{dt^i} \right|_{t=0} \quad , \quad (II.11)$$

$$F_i = \left. \frac{d^i G(t+1)}{dt^i} \right|_{t=0} \quad , \quad (II.12)$$

Funcțiile generatoare de momente pentru *cumulanți* se obțin prin introducerea unor relații de forma ***H(u) = ln G(u),*** *cu u = t, t+1,* respectiv*,* e^t. Introducerea acestor funcții este posibilă datorită faptului că la energii finite funcțiile *G(u)* există și se pot dezvolta în serii de puteri convergente. În acest context se poate considera că funcțiile ***G(u) = exp(H(u))*** *se pot dezvolta în serie, iar* <u>*coeficienții acestor dezvoltări*</u> *sunt* <u>*cumulanți*</u> *de diferite tipuri.*

Distribuțiile de multiplicitate se pot caracteriza și cu ajutorul unor ***parametrii și indicatori de formă*** care se definesc folosind momente de diferite tipuri și cumulanți [20,21,23-29].

Doi dintre parametrii cei mai folosiți în descrierea distribuțiilor de multiplicitate sunt <u>*parametrul de asimetrie (skewness*</u>), $\boldsymbol{\beta_1}$, și <u>*parametrul de formare de maxime (peaking)*</u>, $\boldsymbol{\beta_2}$ **.** Cei doi parametrii sunt definiți prin relațiile de mai jos:

$$\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} \quad , \quad (II.13)$$

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad . \quad (II.14)$$

În analiza contribuțiilor distribuțiilor de multiplicitate la stabilirea dinamicii ciocnirii se are în vedere faptul că *momentul central de ordinul al treilea este nul pentru populații* *distribuite în mod simetric*; de aceea $\beta_1 = 0.0$ [20,21,26-28]. Pentru *distribuția normală* valoarea parametrului de formare de maxime este următoarea: $\beta_2 = 3.0$.

Indicatorii de formă ai distribuției de multiplicitate se definesc astfel:

$$\gamma_{k-2} = \frac{g_k}{g_2^{k/2}} = \frac{g_k}{D^k} \qquad , \qquad (II.15)$$

În relația (II.2.15) g_k sunt coeficienții dezvoltării în serie pentru funcția generatoare $G(e^t) = exp(H(e^t))$, iar $D = \sqrt{g_2}$ este *dispersia distribuției de multiplicitate*.

Ținând seama de cele arătate se poate spune că analiza multiplicităților și distribuțiilor de multiplicitate este extrem de importantă și de bogată în informații asupra dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste, formării stărilor anomale în materia nucleară și apariția unor tranziții de fază în astfel de ciocniri. Câteva exemple în acest sens, care vor fi prezentate în continuare, vor fi edificatoare.

V.2. Producerea necorelată de particule în ciocniri nucleare relativiste

Așa cum s-a arătat anterior, distribuțiile de multiplicitate oferă informații asupra geometriei ciocnirii, iar momentele asociate dau informații asupra dinamicii ciocnirii. De aceea, distribuțiile de multiplicitate pentru diferite tipuri de particule obținute în ciocniri nucleare relativiste cu diferite grade de centralitate pot fi descrise prin funcții de densitate de probabilitate care pot îngloba o serie de comportări dinamice de interes. Cea mai folosită funcție de densitate de probabilitate pentru descrierea distribuției de multiplicitate experimentale este distribuția Poisson [20,21,26-28]. *Această distribuție este adecvată*, pe baza proprietăților sale specifice, ***descrierii generării necorelate de particule în ciocniri nucleare relativiste*** [3-5,21]. Dacă acordul dintre distribuția Poisson și distribuția de multiplicitate experimentală pentru tipul de particulă considerat este bun, atunci avem de a face cu o generare total necorelată de particule. Abaterile - mai mici sau mai mari - indică existența unor corelații în generarea tipului de particulă considerat [17-19,21,30-33]. Trebuie menționat aici că în analiza datelor experimentale sunt folosite mai multe *tipuri de multiplicități*, în funcție de condițiile experimentale avute la dispoziție. *Multiplicitățile particulelor cu sarcină - pozitive, negative sau de ambele semne - sunt* *cele mai folosite în experimente.* Se mai folosesc multiplicitățile unor *anumite tipuri de particule neutre* (mai frecvent π^o, K^o, Λ^o). O multiplicitate foarte rar folosită este ***multiplicitatea adevărată*** sau ***multiplicitatea totală***. Acest tip de multiplicitate ia în considerare toate particulele cu sarcină şi neutre produse într-o ciocnire dată, la energie dată. Datorită dificultăților experimentale majore în detectarea tuturor particulelor generate, *cu deosebire a celor neutre*, *multiplicitatea adevărată* este foarte rar întâlnită în analiza datelor experimentale.

Distribuția Poisson are forma următoare:

$$P_{th}(n) = \frac{<n>^n}{n!} e^{-<n>} \quad , \quad (II.16)$$

unde $<n>$ este *multiplicitatea medie*. Ea reprezintă *unicul parametru al acestei distribuții*.

Folosind relațiile (II.2.10), respectiv, (II.2.11), se pot obține momentele ordinare necentrale, respectiv, momentele ordinare centrale. Toate depind de multiplicitatea medie, $<n>$. Valorile obținute pentru momentele ordinare necentrale sunt următoarele:

$$m'_{1th} = <n> \quad , \quad (II.17)$$

$$m'_{2th} = <n>(<n>+1) \quad , \quad (II.18)$$

$$m'_{3th} = <n>[(<n>+1)^2 + 1] \quad , \quad (II.2.19)$$

$$m'_{4th} = <n>(<n>^3 + 6.<n>^2 + 7.<n> + 1) \quad . \quad (II.20)$$

În cazul momentelor ordinare centrale valorile obținute sunt de forma:

$$m_{1th} = 0 \quad , \quad (II.21)$$

$$m_{2th} = <n> \quad , \quad (II.22)$$

$$m_{3th} = <n> \quad , \quad (II.23)$$

$$m_{4th} = <n>(3<n> + 1) \quad , \quad (II.24)$$

Folosind valorile momentelor ordinare centrale se pot calcula, pe baza relațiilor (II.13) şi (II.14), *parametrul de asimetrie, β_1,* respectiv, *parametrul de formare de maxime, β_2.* Valorile celor doi parametrii sunt:

$$\beta_{1th} = \frac{1}{<n>} \quad , \quad (II.25)$$

$$\beta_{2th} = 3 + \frac{1}{<n>} \quad . \quad (II.26)$$

Tot pe baza momentelor ordinare calculate anterior se pot stabili valorile dispersiei, D_{th}, şi lărgimii relative a distribuţiei, η_{th}. Se obţin următoarele valori:

$$D_{th} = \sqrt{<n>} \quad , \quad (II.27)$$

$$\eta_{th} = \frac{D_{th}^2}{<n>} = 1 \quad . \quad (II.2.28)$$

Valorile teoretice ale momentelor şi parametrilor asociaţi distribuţiei Poisson trebuie comparate cu valorile lor experimentale. În funcţie de rezultatele comparaţiilor se pot face afirmaţii asupra tipului de mecanism de producere de particule (producere necorelată sau producere corelată). În funcţie de *forma distribuţiei de multiplicitate experimentale*, *simetria nucleelor care participă la ciocnire*, *tipul ciocnirii* (centrală sau periferică) şi alte observaţii şi rezultate experimentale se pot propune *alte funcţii de densitate de probabilitate* sau se pot combina două sau mai multe funcţii de densitate de probabilitate care au forme mai simple şi pot fi asociate unor mecanisme de producere de particule diferite [17-21]. Unele din ele vor fi discutate în cadrul cursului.

V.3. Comportări experimentale ale multiplicităţii medii şi distribuţiei de multiplicitate asociate

Analiza datelor experimentale asupra multiplicităţii pionilor negativi şi multiplicităţii particulelor cu sarcină obţinute în 13 ciocniri nucleu-nucleu, periferice şi centrale, la 4.5 A GeV/c, folosind spectrometrul SKM 200 [20], a permis evidenţierea unor comportări globale ale multiplicităţii medii experimentale, anume [3-5,17-19,32-34]:

(a) *creşterea valorii multiplicităţii medii cu creşterea numărului de masă al nucleului ţintă, pentru un nucleu incident dat, atât pentru ciocniri periferice, cât şi pentru ciocniri centrale*;

(b) *creşterea valorii multiplicităţii medii cu creşterea numărului de masă al nucleului incident, pentru un nucleu ţintă dat, pentru ambele tipuri de ciocniri*;

multiplicităţile medii sunt mai mari în ciocniri centrale decât în ciocniri periferice;

în general, *multiplicităţile medii cresc cu creşterea centralităţii ciocnirii*.

Tabelul II.1. conține valorile medii ale acestor multiplicității pentru ciocnirile considerate.

Trebuie remarcat aici faptul că au fost observate comportări similare şi în alte ciocniri nucleu-nucleu la energii cuprinse între 0.8 GeV/A şi 200 GeV/A [9,10,12-15,22,35-38].

Valorile experimentale ale momentelor ordinare pentru diferite ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c sunt incluse în Tabelul II.2. Pe baza lor sunt calculate o serie de alte mărimi fizice de interes, anume: dispersia, D, lărgimea relativă a distribuției de multiplicitate, η, parametrul de asimetrie, β_1 şi parametrul de formare de maxime, β_2. Valorile obținute sunt incluse în Tabelul II.3. Rezultatele experimentale incluse în aceste tabele au fost comparate cu cele teoretice, obținute în ipoteza unei generări total necorelate de particule. Trebuie reamintit aici faptul _că generarea total necorelată de particule este descrisă de distribuția Poisson_ [20,21,26-28].

Ciocnirea	$T(\theta_{ch}, \theta_n)$	N_{ev}	$\langle n_\pi \rangle$	D_{exp}	η_{exp}
O-Ne	*T(2,0)*	*290*	*5.95±0.17*	*2.19±0.12*	*0.80±0.09*
	T(5,0)	*36*	*6.04±0.41*	*2.41±0.28*	*0.96±0.23*
	T(14,0)	*20*	*5.48±0.48*	*2.15±0.34*	*0.99±0.28*
O-Pb	*T(2,0)*	*2191*	*11.07±0.31*	*3.49±0.05*	*1.10±0.04*
	T(5,0)	*891*	*12.41±0.35*	*3.16±0.08*	*0.80±0.05*
	T(14,0)	*491*	*12.76±0.37*	*3.12±0.11*	*0.76±0.06*
C-Cu	*T(2,0)*	*2154*	*6.72±0.16*	*2.78±0.04*	*1.15±0.04*
	T(5,0)	*470*	*7.85±0.21*	*2.61±0.08*	*0.87±0.06*
	T(14,0)	*144*	*8.29±0.28*	*2.65±0.14*	*0.85±0.09*

Tabelul II.1. Valorile multiplicităților medii ale pionilor negativi obținuți în câteva ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c, pentru diferite moduri de declanşare a camerei cu streamer a spectrometrului SKM 200 de la IUCN Dubna

$A_P - A_T$	He-Li	He-C	He-Ne	He-Al	He-Cu	He-Pb
m'_{1exp}	0.85±0.02	1.05±0.05	1.14±0.05	1.33±0.05	1.65±0.08	1.87±0.08
m'_{1th}	0.86	1.05	1.14	1.32	1.65	1.87
m'_{2exp}	1.57±0.05	2.14±0.13	2.59±0.17	3.35±0.19	4.47±0.30	5.82±0.31
m'_{2th}	1.68	2.25	2.80	3.65	5.02	6.19
m'_{3exp}	3.63±0.18	5.46±0.44	7.46±0.67	10.73±0.87	16.37±1.43	22.01±1.54
m'_{3th}	3.91	5.71	8.04	11.65	17.52	23.23
m'_{4exp}	10.29±0.77	16.42±1.79	25.76±3.14	41.28±5.07	67.22±8.04	95.65±8.58
m'_{4th}	10.48	16.57	26.11	41.69	68.06	96.57

Tabelul II.2. Valorile experimentale şi calculate (distribuție Poisson) ale momentelor ordinare pentru diferite ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c

A_P-A_T	$T(\theta_{ch},\theta_n)$	D_{exp}	η_{exp}	β_{1exp}	$\langle n\rangle_{exp}$
He-Li	*T(2,0)*	*1.02±0.06*	*1.00±0.07*	*0.88±0.06*	*1.02±0.06*
He-C	*T(2,0)*	*1.19±0.03*	*1.03±0.07*	*0.78±0.08*	*1.37±0.06*
He-Al	*T(2,0)*	*1.39±0.12*	*1.12±0.11*	*0.77±0.12*	*1.72±0.12*
He-Cu	*T(2,0)*	*1.47±0.05*	*1.01±0.08*	*0.55±0.10*	*2.15±0.10*
He-Pb	*T(2,0)*	*1.45±0.05*	*0.94±0.07*	*0.65±0.07*	*2.23±0.08*
C-C	*T(2,0)*	*1.99±0.04*	*1.03±0.05*	*0.50±0.06*	*3.85±0.08*
C-Ne	*T(2,0)*	*2.13±0.04*	*1.02±0.04*	*0.33±0.05*	*4.45±0.06*
C-Zr	*T(2,0)*	*2.76±0.07*	*1.01±0.06*	*0.06±0.05*	*7.55±0.23*
C-Pb	*T(2,0)*	*3.11±0.05*	*1.16±0.05*	*0.18±0.05*	*8.35±0.24*

Tabelul II.3. Valorile experimentale ale unor mărimi fizice specifice distribuțiilor de multiplicitate ale pionilor negativi produşi în ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c

Din analiza datelor şi rezultatele experimentale cuprinse în aceste ultime două tabele se constată *abateri de la generarea total necorelată a pionilor negativi în ciocniri nucleare la 4.5 A GeV/c*. Compararea unor valori experimentale cu estimările teoretice care au la bază distribuția Poisson, pentru diferite mărimi fizice de interes, confirmă aceste abateri. Se observă, de asemenea, că *aceste diferențe cresc cu creşterea* *gradului de centralitate a ciocnirii*, precum şi cu *creşterea* *numerelor de masă ale nucleelor care se ciocnesc*.

Analiza bazată pe cumulanți indică posibilitatea *unei produceri total necorelate de particule* în sursa considerată, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

$f_1 = g_1 = < n >$, *(II.29a)*

$d_{k>1} = f_{k>1} = 0$, *(II.29b)*

$g_k = < n >^k$, *(II.2.29c)*

unde d_k şi f_k sunt coeficienții dezvoltărilor în serie pentru funcțiile $G(t) = e^{H(t)}$, respectiv, $G(t+1) = e^{H(t+1)}$. Se consideră că *mărimile f_k sunt o măsură - insuficientă*, totuşi, indiferent de energie - *a abaterii de la producerea total necorelată de particule*.

Pentru ciocniri centrale O-Pb, în modul de declanşare T(2,0), *ciocniri care implică cele mai mari multiplicități pionice* dintre ciocnirile considerate în tabelele anterioare, se obțin următoarele valori ale cumulanților: $f_{2exp} = -2.29 \pm 0.57$, $g_{2exp} = 95.79 \pm 0.45$. Aceste valori sugerează *un anumit grad de corelare în sursa de particule la generarea unora dintre acestea*.

Aceste rezultate experimentale vin să confirme o serie de observații experimentale la energii apropiate [40,41], precum şi pe cele de la energii mai mari [42,43] decât cea considerată pentru ciocnirile analizate anterior. Totodată, ele indică posibilitatea observării unor semnale experimentale ale unor stări şi fenomene anomale ("exotice") în materia nucleară fierbinte şi densă formată prin ciocniri nucleare relativiste.

Analiza rezultatelor experimentale obținute în ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c *confirmă rolul geometriei şi simetriei ciocnirii* în *descrierea generării multiple de particule*. Ciocnirile centrale sunt mai bogate în informații decât cele periferice prin numărul mai mare de particule de un anumit tip create şi prin tipurile mai numeroase de particule create. De asemenea, sunt sugerate unele conexiuni între modurile de declanşare ale camerei cu streamer a spectrometrului SKM 200 şi valorile parametrilor de ciocnire corespunzători. Valoarea parametrului de ciocnire pentru ciocniri centrale poate fi determinată de razele nucleelor care se ciocnesc. Este un rezultat important care vine în sprijinul ideii că geometria ciocnirii are un rol extrem de important în cunoaşterea dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste.

Geometria ciocnirii este reflectată şi de *forma distribuţiei de multiplicitate*. De aceea, în cele ce urmează se vor trata unele aspecte legate de informaţiile care se pot obţine din forma distribuţiilor de multiplicitate şi din momentele asociate lor.

V.4. Stoparea nucleului incident, generarea parţial necorelată şi curgerea materiei nucleare

Forma distribuţiei de multiplicitate se modifică uşor cu creşterea gradului de centralitate a ciocnirii. Distribuţiile de multiplicitate ale pionilor negativi produşi în ciocniri centrale O-Pb, la 4.5 A GeV/c, pentru modurile de declanşare T(2,0), respectiv, T(5,0) confirmă o astfel de comportare. Această modificare permite să se încerce luarea în considerare a unor contribuţii ale regiunilor participantă şi spectatoare la generarea multiplă de particule în ciocniri nucleare relativiste.

Pentru confirmarea abaterilor de la comportarea de tip generare total necorelată - distribuţie de multiplicitate descrisă complet şi corect de o distribuţie Poisson - observate pentru momentele ordinare asociate este importantă fit-area distribuţiilor de multiplicitate experimentale cu distribuţia Poisson. Se constată că între distribuţiile de multiplicitate experimentale şi distribuţia Poisson există deosebiri, iar valorile testului χ^2 raportat la numărul gradelor de libertate este semnificativ mai mare decât 1, şi anume: 4.96, respectiv, 3.26. Valori similare se obţin şi pentru alte ciocniri. De exemplu, în ciocniri centrale C-Cu, pentru modul de declanşare T(2,0), valoare χ^2/NGL este de 2,64, iar în ciocniri centrale O-Ne, în acelaşi mod de declanşare, această valoare este de 2.12.

De exemplu, luând în considerare forma distribuţiei de multiplicitate experimentale pentru ciocniri centrale O-Pb - pentru modul de declanşare T(2,0) - şi făcând o tăiere corespunzătoare în multiplicitatea pionilor negativi (numai evenimentele pentru care $n_\pi \geq 4$ sunt considerate în calcul) se obţine următoarea valoare a testului, anume: χ^2/NGL = 2.34. Această comportare poate fi legată de creşterea gradului de centralitate a ciocnirii prin creşterea multiplicităţii minime în evenimentele selectate, precum şi de unele procese cum ar fi: gradul de stopare al nucleului incident în nucleul ţintă sau contribuţia regiunii spectatoare la procesul de generare multiplă de particule.

O cale de abordare sugerată de aceste rezultate experimentale referitoare la forma distribuției de multiplicitate este legată de ipoteze dinamice, anume: nestoparea nucleului incident în nucleul țintă sau curgerea materiei nucleare formate în procesul de ciocnire [17,44].

Pentru *descrierea distribuției de multiplicitate* se consideră *un produs dintre distribuția Poisson şi distribuția binomială* [17]. La această formă s-a ajuns luându-se în considerare şi alte aspecte care țin de alte mărimi fizice cu semnificație dinamică care vor fi discutate ulterior (*anizotropia distribuției unghiulare a pionilor negativi*, *comportarea numărului de nucleoni participanți*, *caracteristicile termodinamice ale regiunii participante*, precum şi *scăderea puterii de stopare cu creşterea energiei nucleelor incidente* [3-5,25,33,34,47,48]). De aceea, unele din argumente vor fi detaliate în capitolele următoare ale cursului.

Comportarea de tip hidrodinamic a materiei nucleare formate în ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c [3-5,11-14,17,44-48] face ca <u>*distribuția Poisson*</u> *să descrie emisia de particule la echilibru*, iar <u>*distribuția binomială*</u> *să ia în considerare contribuția curgerii fragmentelor incomplet stopate ale celor două nuclee care se ciocnesc*, precum şi pe cea *a unor particule care au fost reîmprăştiate la suprafața de contact dintre regiunea participantă şi regiunea spectatoare*. Aceste ipoteze iau în considerare observarea a două maxime, pentru unghiurile de 0^o şi 180^o, în distribuția unghiulară a pionilor negativi, în sistemul centrului de masă.

În modelele termodinamice se consideră că distribuția de multiplicitate a pionilor negativi este descrisă de o distribuție de tip Poisson, iar multiplicitatea medie a pionilor negativi va depinde de temperatura şi volumul sursei care îi emite [3-5,11-14,17,44-48].

Aşa cum s-a specificat anterior, pentru descrierea distribuției de multiplicitate se consideră un produs dintre distribuția Poisson şi distribuția binomială [17,44]. O astfel de populație este descrisă de o funcție de densitate de probabilitate de forma următoare:

$$D(n_P, n_b, n_{\exp}) = [C_N^i p^i (1-p)^{N-i}].[\frac{<n>^i}{i!} e^{-<n>}] \quad , \quad (II.30)$$

unde n_P este *multiplicitatea particulelor generate într-un proces de tip Poisson*, n_b este *multiplicitatea particulelor implicate în procese de curgere cauzate de stoparea incompletă a celor două nuclee care se ciocnesc sau de reîmprăştieri la suprafața de* *contact dintre regiunea participantă şi regiunea spectatoare*, n_{exp} este *multiplicitatea experimentală* definită astfel:

$$n_{\exp} = n_P - n_b \quad . \quad (II.31)$$

Aici p este probabilitatea pentru mişcarea de-a lungul direcției fasciculului, iar N este dimensiunea populației.

Calculul momentelor ordinare necentrale ale distribuției de multiplicitate asociate cu funcția de densitate de probabilitate *(II.30)* se face folosind funcția generatoare de momente următoare:

$$G(z = e^t) = \frac{(1-p)^N}{e^{<n_P>}} \sum_{i=0}^{N} C_N^i \,(p < n_P > e^t)^i \, \frac{1}{i!(1-p)^i} \quad , \quad (II.32)$$

unde t este un parametru real.

Luând în considerare relația de definiție pentru momente ordinare necentrale, anume: $m'_k = \left.\frac{d^k G(z)}{dt^k}\right|_{t=0}$, se obțin următoarele expresii pentru primele 4 momente ordinare necentrale:

$$m'_1 = \frac{(1-p)^N}{e^{<n_P>}} \sum_{i=0}^{N} C_N^i \, \frac{i}{i!} \left(\frac{p < n_P >}{1-p} \right)^i = $$
$$= \frac{(1-p)^N}{e^{<n_P>}} Np < n_P > \sum_{j=0}^{N-1} C_{N-1}^j \, \frac{j}{j!} \left(\frac{p < n_P >}{1-p} \right)^j \quad , \quad (II.33)$$

$$m'_2 = \frac{(1-p)^N}{e^{<n_P>}} \sum_{i=0}^{N} C_N^i \, \frac{i^2}{i!} \left(\frac{p < n_P >}{1-p} \right)^i = $$
$$== \frac{(1-p)^{N-1}}{e^{<n_P>}} Np < n_P > \sum_{j=0}^{N-1} C_{N-1}^j \, \frac{1}{j!} \left(\frac{p < n_P >}{1-p} \right)^{\mathrm{j}} \quad , \quad (II.34)$$

$$m'_3=\frac{(1-p)^N}{e^{<n_P>}}\sum_{i=0}^{N}C_N^i\,\frac{i^3}{i!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^i=$$
$$=\frac{(1-p)^N}{e^{<n_P>}}\sum_{i=0}^{N}(i^2C_N^i)\,\frac{i}{i!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^{i-1}=$$
$$=(1-p)^{N-1}Np<n_P>\sum_{j=0}^{N-1}C_{N-1}^j\,\frac{1}{j!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^{\mathrm{j}}+\qquad,\quad (II.35)$$
$$+\frac{(1-p)^{N-1}}{e^{<n_P>}}Np<n_P>\sum_{j=0}^{N-1}C_{N-1}^j\,\frac{j}{j!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^{\mathrm{j}}=$$
$$=Np<n_P>m'_1+m'_2$$

$$m'_4=\frac{(1-p)^N}{e^{<n_P>}}\sum_{i=0}^{N}C_N^i\,\frac{i^4}{i!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^i=$$
$$=\frac{(1-p)^{N-1}}{1-p}Np<n_P>\sum_{j=0}^{N-1}C_{N-1}^j\,\frac{j^2}{j!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^j=$$
$$=\frac{(1-p)^{N-1}}{1-p}Np<n_P>\sum_{j=0}^{N-1}C_{N-1}^j\,\frac{j}{j!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^j+\qquad.\quad (II.36)$$
$$+\frac{(1-p)^{N-1}}{e^{<n_P>}}Np<n_P>\sum_{j=0}^{N-1}C_{N-1}^j\,\frac{j+1}{j!}\left(\frac{p<n_P>}{1-p}\right)^j=$$
$$=Np<n_P>(m'_1+m'_2)+m'_3$$

Între cele 4 momente ordinare necentrale există următoarea relație de legătură:

$$\frac{m'_4-m'_3}{m'_2+m'_1}=\frac{m'_3-m'_2}{m'_1}\qquad.\quad (II.37)$$

Această relație este îndeplinită de valorile experimentale ale acestor momente, obținute în ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c, valori incluse în Tabelul II.2.

Trebuie subliniat aici rolul important al momentului de ordin zero în definirea corectă a parametrilor funcției de densitate de probabilitate. Acest moment permite normarea valorilor corespunzătoare ale momentelor şi parametrilor pentru a se face discuția în termeni specifici teoriei probabilităților.

În Tabelul II.4. şi Tabelul II.5. sunt incluse valorile calculate şi experimentale ale momentelor şi parametrilor pentru ciocniri centrale, respectiv, ciocniri periferice, în diferite ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c.

$A_P - A_T$	O-Ne	O-Pb	C-Cu
N	290	2693	100
$<n_P>$	7.69	14.40	8.97
p ($x10^{-2}$)	0.78	0.41	0.56
m'_{1exp}	4.91±0.22	11.83±0.25	6.55±0.24
m'_{1th}	4.92	12.35	6.54
m'_{2exp}	27.69±0.33	150.13±3.36	48.83±3.44
m'_{2th}	27.31	159.05	50.50
m'_{3exp}	168.90±15.98	2009.62±49.15	401.53±42.11
m'_{3th}	164.06	2124.43	413.77
m'_{4exp}	1091.40±96.85	28073.40±756.70	3572.60±502.20
m'_{4th}	1055.00	29377.10	3577.60
$<n_b>$	2.78	2.57	2.42

Tabelul II.4. Valorile calculate şi experimentale ale momentelor şi parametrilor
pentru diferite ciocniri centrale nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c

Având în vedere faptul că parametrul *p* poate fi asociat cu fracția de nucleoni din nucleul incident care "țin minte" mişcarea inițială, iar raportul dintre n_b şi n_P poate fi determinat de contribuția stopării incomplete a nucleelor care se ciocnesc la curgerea hidrodinamică din regiunea participantă se poate concluziona că cele două nuclee care se ciocnesc se stopează aproape complet ($p < 0.01$, în toate ciocnirile), iar regiunile spectatoare absorb mai multe particule generate din regiunea participantă cu creşterea dimensiunilor lor, deci cu gradul de asimetrie a ciocnirii. Aceste ultime aspecte rezultă din valorile multiplicităților n_b şi n_P.

Se poate afirma că distribuțiile de multiplicitate experimentale pot fi descrise corect de distribuția de multiplicitate asociată cu funcția de densitate de probabilitate dată de relația (II.30). Acest fapt vine să confirme posibilitatea observării unor stări anomale, "exotice", în materia nucleară fierbinte şi densă produsă în ciocniri nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c.

$p - A_T$	He-Li	He-C	He-Ne	He-Al	He-Cu	He-Pb
N	4026	1099	988	1239	804	1048
$<n_P>$	1.94	2.29	2.28	2.52	3.00	3.31
p (x10^{-2})	0.33	0.13	0.24	0.19	0.31	0.26
m'_{1exp}	0.85±0.02	1.05±0.05	1.14±0.05	1.33±0.05	1.65±0.08	1.87±0.08
m'_{1th}	0.86	1.05	1.14	1.32	1.65	1.87
m'_{2exp}	1.57±0.05	2.14±0.13	2.59±0.17	3.35±0.19	4.47±0.30	5.82±0.31
m'_{2th}	1.68	2.25	2.80	3.65	5.02	6.19
m'_{3exp}	3.63±0.18	5.46±0.44	7.46±0.67	10.73±0.87	16.37±1.43	22.01±1.54
m'_{3th}	3.91	5.71	8.04	11.65	17.52	23.23
m'_{4exp}	10.29±0.77	16.42±1.79	25.76±3.14	41.28±5.07	67.22±8.04	95.65±8.58
m'_{4th}	10.48	16.57	26.11	41.69	68.06	96.57
$<n_b>$	1.09	1.24	1.14	1.19	1.35	1.44

Tabelul II.5. Valorile calculate şi experimentale ale momentelor şi parametrilor pentru diferite ciocniri periferice nucleu-nucleu la 4.5 A GeV/c.

Problemele prezentate confirmă importanța multiplicității, distribuției de multiplicitate şi momentelor asociate în cunoaşterea dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste, stărilor anomale formate şi tranzițiilor de fază produse în materia nucleară fierbinte şi densă. Multe alte aspecte dinamice pot fi observate din anliza multiplicităților particulelor generate în ciocniri nucleare relativiste şi din comportarea distribuțiilor de multiplicitate asociate. De aceea, pe parcursul cursului, se vor face adesea referiri la aceste mărimi fizice.