

Capitolul al XIII-lea

Ecuatia Boltzmann, ecuația Vlasov, ecuația Vlasov-Uhlenbeck și modele asociate

XIII.1. Metoda Hartree-Fock dependentă de timp și obținerea ecuației Boltzmann

Pentru rezolvarea problemei interacției a A corpuri din punct de vedere cuantic, nerelativist, este necesară rezolvarea ecuației Schrödinger dependente de timp [62,63]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \quad , \quad (\text{III.13})$$

unde funcția de stare depinde de toate cele A corpuri și de timp: $\Psi = \Psi(1,2,\dots,A;t)$.

Deoarece această ecuație nu se poate rezolva direct a fost necesară găsirea unor metode specifice și aproximații pentru rezolvare. Unele dintre acestea au fost preluate din alte domenii ale Fizicii.

Printre metodele des folosite pentru rezolvarea problemei de A corpuri în Fizica nucleară se numără și metoda Hartree-Fock. Ea are la bază teoria Hartree a câmpurilor auto-consistente (“self-consistente”) folosită în Fizica atomică. În acest caz se pleacă de la un set de funcții de stare uniparticulă oarecare. Prin medierea interacției de mai multe corpuri se generează un potențial uniparticulă. Cu ajutorul acestui potențial și a setului de funcții de stare se rezolvă ecuația Schrödinger și se obține un set nou de funcții de stare.

Se reia acest ciclu și se repetă până la obținerea consistenței între funcțiile de stare și potențialul de interacție.

Există o teorie Hartree-Fock statică care implică unele modificări, și anume:

- (i) introducerea unui termen de schimb suplimentar;
- (ii) funcția de stare de mai multe corpuri este aproximată printr-un determinant Slater de funcții de stare uniparticulă;
- (iii) hamiltonianul de interacție este compus dintr-un hamiltonian dat de teoria Hartree la care se adaugă un potențial uniparticulă nonlocal.

Pentru rezolvare se folosește, ca și în primul caz, un procedeu iterativ. Acesta se repetă până la atingerea consistenței între interacția mediată și funcțiile de stare.

Remarcă. Prin metoda Hartree-Fock se construiește o “mare Fermi” de particule cu o suprafață Fermi bine definită, deoarece în calculul determinantului specific Hartree-Fock se selectează A funcții de stare uniparticulă care dau cele mai joase nivele de energie.

Metoda Hartree-Fock statică a fost folosită cu succes în modelele atomice, iar mai apoi în modelele nucleare de pături [14,15,62-64].

Ciocnirile nucleare – indiferent de energia la care se produc – ridică problema dependenței de timp pentru descrierea evoluției celor A nucleoni care se ciocnesc. De aceea, este necesară o cale tratabilă pentru o ecuație Hartree-Fock dependentă de timp. În absența unui câmp central extern nucleonii sunt legați între ei, în nucleele din care provin, prin interacții mutuale (reciproce). Metoda Hartree-Fock este considerată, în cele mai multe cazuri de interes, ca o aproximație. Acest lucru este legat de faptul că încearcă reducerea problemei mai multor corpuri care interacționează tare la una de mai multe particule care nu interacționează și neglijează interacțiile reziduale. Aproximația Hartree-Fock dependentă de timp permite descrierea stărilor excitate prin luarea în considerare a părții de distanță lungă a potențialului de interacție sau prin considerarea unui câmp al interacțiilor reziduale.

Determinantul Slater pentru un număr nederminat de stări a, b, c, ... are o soluție care se poate scrie astfel:

$$|abc\dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{a,b,c,\dots} \psi_a \psi_b \psi_c \dots \text{sign}(a,b,c,\dots) \quad . \quad (\text{III.14})$$

În ipoteza că funcția de stare a unui nucleu este o combinație liniară de determinați Slater, hamiltonianul sistemului de mai multe corpuri se poate scrie sub forma următoare:

$$H = T + V = \sum_{i,j} T_{ij} a_i^+ a_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} U_{ijkl} a_i^+ a_j^+ a_k a_l \quad . \quad (\text{III.15})$$

În relația de mai sus T_{ij} este un operator uniparticulă pentru energia cinetică, iar U_{ijkl} este un operator corespunzător energiei potențiale și ia în considerare interacția a două corpuri; a_i^+ este operatorul de creare de particule, iar a_j este operatorul de anihilare.

Pentru îndeplinirea condițiilor de asimetrie pentru funcțiile de stare ale nucleonilor și respectarea principiului lui Pauli (nucleonii sunt fermioni) operatorii de creare și de anihilare satisfac relațiile de mai jos:

$$\{a_i^+, a_j^+\} = 0 \quad , \quad (\text{III.16})$$

$$\{a_i^+, a_j\} = \delta_{ij} \quad . \quad (\text{III.17})$$

Se introduce o matrice de densitate uniparticulă de forma:

$$\rho_{ji} = \langle \Psi | a_i^+ a_j | \Psi \rangle \quad , \quad (\text{III.18})$$

soluție a ecuației von Neumann:

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = \langle \Psi | [a_i^+ a_j, H] | \Psi \rangle \quad , \quad (\text{III.19})$$

unde H este un operator hermitic.

Prin introducerea unei matrici de densitate de două particule de forma următoare:

$$\rho_{ijkl}^{(2)} = \rho_{jk} \rho_{il} - \rho_{jl} \rho_{ik} \quad , \quad (\text{III.20})$$

se poate obține ecuația Hartree-Fock dependentă de timp:

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [h, \rho] \quad . \quad (\text{III.21})$$

Hamiltonianul Hartree-Fock, h , care conține conservarea numărului de particule și conservarea energiei, se poate scrie astfel:

$$h = \sum_{ij} \left[T_{ij} + \sum_{kl} (V_{ikjl} - V_{iklj}) \rho_{lk} \right] \quad . \quad (\text{III.22})$$

Ecuația (III.21) este similară cu ecuația Schrödinger dependentă de timp din relația (III.13) pentru un hamiltonian de tip h .

Aproximația Hartree-Fock dependentă de timp se poate aplica, cu relativ succes, pentru ciocniri nucleare la energii mai mari de 10 A MeV. Principalele procese și fenomene fizice de interes care se produc în ciocniri nucleare la energii intermediare și înalte și se pot descrie folosind aproximația Hartree-Fock dependentă de timp sunt: fuziunea în ciocniri cu ioni grei, formarea nucleului compus, disiparea, propagarea undei de șoc în materia nucleară, fragmentarea nucleară multiplă ș.a.

Pentru aplicarea aproximației Hartree-Fock dependentă de timp la energii pe nucleon în vecinătatea energiei de repaus a nucleonilor – dar mai mici – sunt necesare ipoteze suplimentare. Astfel, se poate considera că există procese fizice care perturbă interacția binară. Funcția de stare perturbată care se obține este o consecință a împrăștierii particulelor pe orbitale neperturbate. De aceea, funcția de stare perturbată se poate scrie astfel:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle + \frac{1}{i\hbar} \sum_{kk'l'} \int dt e^{i\omega t} V_{k'l'kl} a_k^+ a_l^+ a_l a_k |\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle - \sum_{kk'l'} \frac{e^{i\omega t} - 1}{\hbar\omega} V_{k'l'kl} a_k^+ a_l^+ a_l a_k |\Psi_0\rangle \quad . \quad (III.23)$$

Pentru obținerea matricei de densitate se consideră următoarea ecuație von Neumann:

$$\frac{d\rho_{ii}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | a_i^+ [a_i, V] + [a_i^+, V] a_i | \Psi \rangle \quad . \quad (III.24)$$

Dacă se consideră cazul unidimensional matrice are o formă diagonală, anume:

$$\rho_{ji} = n_i \delta_{ij} \quad , \quad (III.25)$$

unde n_i sunt numere de ocupare. Prin introducerea în ecuația von Neumann dată de relația (III.24) se determină numerele de ocupare. Relația (III.24) se poate scrie astfel:

$$\frac{dn_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \sum_j V_{ij} \langle \Psi | a_i^+ a_j - a_j^+ a_i | \Psi \rangle \quad . \quad (III.26)$$

Neglijându-se termenii de ordin superior se poate scrie o nouă ecuație, de forma următoare:

$$\frac{dn_i}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_j V_{ij}^2 \delta(E_j - E_i) [n_j(1 - n_i) - n_i(1 - n_j)] \quad . \quad (III.27)$$

Ecuația obținută are o formă similară cu ecuația Boltzmann standard cu “regula de aur” (Fermi) pentru interacții inclusă [62-64].

Trebuie reamintit aici faptul că ecuația Boltzmann este o ecuație de tip ireversibil și descrie evoluția în timp a unei funcții de distribuție. Această funcție de distribuție poate fi și numărul mediu de particule aflate într-o stare uniparticulă [65].

Remarcă. 1. “Regula de aur” (Fermi) dă legătura dintre probabilitatea de tranziție de la o stare inițială i la o stare finală f , w_{fi} , cu luarea în considerare a hamiltonianului de interacție, și densitatea de stări pentru starea finală, $\rho(E_f)$. Ea se scrie astfel:

$$w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad . \quad (\text{III.28})$$

Observație. Trecerea la funcția Dirac, δ , se face în ipoteza că timpul t al tranziției de la o stare la alta este suficient de lung, dar mai mic decât timpul de ciocnire. Se interzic astfel ciocnirile de ordin superior (sunt acceptate numai ciocniri binare, așa cum s-a presupus inițial).

Luarea în considerare a problemei interacției a două corpuri permite introducerea termenilor de ciocnire în diferite modele care folosesc ecuația Boltzmann. Expresia ecuației Boltzmann pentru numărul de ocupare este următoarea:

$$\frac{dn_i}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{j'i'j} V_{ij'i'}^2 \delta(E_{i'} + E_{j'} - E_i - E_j) [n_{i'} n_{j'} (1 - n_i)(1 - n_j) - n_i n_j (1 - n_{i'}) (1 - n_{j'})] \quad .$$

(III.29)

Dacă se consideră o funcție de distribuție uniparticulă $f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$ ecuația care se poate scrie, cu luarea în considerare a termenilor de ciocnire, este de forma următoare:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla \right) f_1(\vec{r}, \vec{p}, t) = C - P \quad . \quad (\text{III.30})$$

unde C este termenul de câștig, iar P este termenul de pierdere. Ambii termeni depind de forma funcției de distribuție uniparticulă, $f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$, secțiunea eficace, σ , și viteza relativă, $\frac{\vec{p} - \vec{p}'}{m}$.

Ecuația Boltzmann se poate folosi într-o gamă largă de modele pentru descrierea dinamicii ciocnirilor nucleare la energii intermediare și relativiste. Astfel de modele sunt cele de cascadă intranucleară și cele hidrodinamice. Aceste modele vor fi discutate în

curs. Ecuația Boltzmann poate fi folosită și pentru descrierea formării și evoluției plasmei de cuarci și gluoni [66].

XIII.2. Ecuația Vlasov. Ecuația Vlasov-Uenling-Uhlenbeck

Pentru includerea ciocnirilor binare *ecuația Hartree-Fock dependentă de timp* poate fi cuplată cu o *ecuație Master*. Ecuația Master ia în considerare *probabilitățile de ocupare*, $P_{n_i}(t)$, pentru stările uniparticulă n_i . Ea se scrie, în general, astfel [65]:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_m [w_{nm}P_m(t) - w_{mn}P_n(t)] \quad , \quad (III.31)$$

unde w_{nm} este probabilitatea de tranziție din starea n în starea m , iar w_{mn} este probabilitatea de tranziție din starea m în starea n .

În unele teorii, se propune înlocuirea *probabilității de tranziție* $P_n(t)$, cu o *funcție Wigner*, $f(\vec{r}, \vec{p}) = \int d^3s. e^{\frac{i\vec{p}\vec{s}}{\hbar}} \rho_{r+\frac{s}{2}, r-\frac{s}{2}}$. [67,68]. Proprietățile fundamentale ale funcției

Wigner sunt:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p. f(\vec{r}, \vec{p}) \quad , \quad (III.32)$$

$$\rho(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r. f(\vec{r}, \vec{p}) \quad . \quad (III.33)$$

Prin folosirea ecuației Boltzmann (III.29) și a *aproximației Born* [61,64,67]:

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | V | \vec{p}'_1 \vec{p}'_2 \rangle = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \right)^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad , \quad (III.34)$$

se obține *definirea termenului de ciocnire* din relația (III.30).

În expresia aproximației Born dată de relația (III.34), $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ este *masa redusă* a sistemului, iar $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ este *secțiunea eficace diferențială* pentru interacția considerată.

Dacă se consideră *derivata totală* a funcției Wigner dependente de timp, $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$, și se pune condiția:

$$\frac{df}{dt} = 0$$

se obține ecuația Vlasov:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad , \quad (III.35)$$

$$\text{unde } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Dacă se ia în considerare expresia termenului de ciocnire care se obține din ecuația Boltzmann și aproximația Born, pentru o funcție de tip Wigner, anume:

$$\left(\frac{df}{dt} \right)_c = - \int \frac{d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2}{(2\pi)^6} \sigma_{V_{12}} [f_1 f_2 (1-f'_1)(1-f'_2) - f'_1 f'_2 (1-f_1)(1-f_2)] \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad ,$$

(III.36)

și se pune condiția următoare pentru derivata totală a funcției:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{df}{dt} \right)_c$$

se obține ecuația Vlasov-Uenling-Uhlenbeck (*ecuația VUU*):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla U \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \\ = - \int \frac{d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2}{(2\pi)^6} \sigma_{V_{12}} [f_1 f_2 (1-f'_1)(1-f'_2) - f'_1 f'_2 (1-f_1)(1-f_2)] \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (III.37)$$

În relațiile de mai sus s-au considerat ciocniri binare. Pentru starea inițială impulsul total este $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, iar pentru starea finală este $\vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$; s-au folosit și următoarele

$$\text{relații de legătură: } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\nabla U.$$

Pentru rezolvarea efectivă a ecuației Vlasov-Uenling-Uhlenbeck sunt necesari unii *parametrii de intrare*. Principalii parametri de intrare sunt *potențialul de interacție* și *secțiunea eficace diferențială pentru ciocniri nucleon-nucleon*. De obicei se consideră

aproximația impulsului extinsă și, de aceea, se folosesc secțiunile eficace pentru ciocnirile nucleonilor liberi [61,62,64,67].

Trebuie menționat aici faptul că *distribuția Fermi-Dirac*, definită prin relația:

$$F_{FD}(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{E}-\mu)} + 1} \quad , \quad (III.38)$$

este o *soluție* a *ecuației Vlasov*, dar și *soluție de echilibru* a *termenului de ciocnire*. Tartările sunt diferite în funcție de forma aleasă pentru potențialul U .

Descrierea ciocnirilor nucleare relativiste se poate face folosind ecuația Vlasov-Uenling-Uhlenbeck în formă nerelativistă sau în formă relativistă. Tratările sunt legate de teoria Bruckner a materiei nucleare [64,67,68].

Așa cum s-a menționat anterior, tartările sunt diferite în funcție de forma aleasă pentru potențialul U . Un potențial folosit în multe modele este *potențialul Skyrme* [69].

Se consideră că interacția poate fi descrisă printr-un potențial general care include interacția de 2 corpuri și interacția de 3 corpuri, de forma următoare:

$$V = \sum_{ij} V_{ij}^{(2)} + \sum_{ijk} V_{ijk}^{(3)} \quad . \quad (III.39)$$

Acest potențial general poate să conducă la forme diferite ale potențialului rezultatnt U care apare în ecuația Vlasov-Uenling-Uhlenbeck. Cele mai folosite pentru descrierea ciocnirilor nucleare relativiste sunt de formele de mai jos:

$$U(\rho) = a\rho + b\rho^2 \quad , \quad (III.40)$$

$$U(\rho) = a\rho + b\rho^{7/6} \quad . \quad (III.41)$$

Cele două forme de potențial rezultatnt amintesc de potențialele folosite în unele modele clasice și sunt asociate unor tipuri de ecuații de stare pentru materia nucleară formată în ciocniri nucleu-nucleu la energii intermediare și înalte. Ele permit introducerea *compresibilității materiei nucleare în stare fundamentală*.

Fie un potențial rezultatnt de o formă similară cu formele considerate în relațiile (III.40) și (III.41) și fie H *hamiltonianul de interacție* corespunzător. Legătura dintre cele

două mărimi este dată de o relație de forma: $U = \left(\frac{\partial H}{\partial \rho} \right)$.

În astfel de modele parametri de intrare principali sunt: *energia de legătură pe nucleon*, E_{leg} , *energia Fermi*, E_F , și *coeficientul de compresibilitate a materiei nucleare*, K .

Energia de legătură este determinată de forma hamiltonianului de interacție, H , și de densitatea nucleară, ρ . Între ele există relația: $E_{leg} = \frac{H}{\rho}$.

Fie un potențial rezultat de forma (III.40) și o energie de legătură exprimată printr-o relație de forma:

$$E_{leg} = \frac{3}{5}E_F + \frac{1}{2}a\rho + \frac{1}{3}b\rho^2 \quad , \quad (III.42)$$

cu următoarele valori ale parametrilor inițiali: $E_{leg} = -16 \text{ MeV}$, $E_F = 23 \text{ MeV}$. Pentru coeficientul de compresibilitate – ales, de asemenea, ca parametru de intrare – se ia valoarea $K = 380 \text{ MeV}$.

Se poate impune *condiția de saturare*, definită prin relația următoare:

$$\frac{\partial E_{leg}}{\partial k_F} = 0 \quad , \quad (III.43)$$

unde k_F este numărul de undă asociat energiei Fermi.

Condiția de saturare este echivalentă cu *condiția de presiune nulă*, definită prin relația de mai jos:

$$p = \rho^2 \frac{\partial E_{leg}}{\partial \rho} = 0 \quad . \quad (III.44)$$

Cele două relații anterioare permit obținerea *coeficientului de compresibilitate*, K :

$$K = k_F^2 \left(\frac{\partial^2 E_{leg}}{\partial k_F^2} \right) = 9\rho \left(\frac{\partial E_{leg}}{\partial \rho} \right) \quad . \quad (III.45)$$

Având în vedere valoarea aleasă ca parametru de intrare pentru coeficientul de compresibilitate, $K=380 \text{ MeV}$, se obține o *ecuație de stare “tare” (“hard”)* care conduce la următoarele valori ale coeficienților a și b din expresia potențialului rezultat U : $a = -124$, $b = 70.5$.

În cazul în care s-ar fi ales un potențial rezultat de tipul celui din relația (III.41), datorită tipului de dependență de densitatea nucleară pentru coeficientul de compresibilitate a materiei nucleare în starea fundamentală se alege valoare $K = 200 \text{ MeV}$, iar ecuația de stare asociată este o *ecuație de stare “moale” (“soft”)*. Valorile coeficienților a și b din expresia potențialului rezultat U sunt, în acest caz, următoarele: $a = -356$, $b = 303$.

Rezultatele obținute – în ambele variante – sunt similare cu cele obținute cu unele variante de modele clasice și, mai ales, cu cele obținute cu modelele de cascadă intranucleară [70], modele care vor fi discutate în capitolul următor al cursului.

XIII.3. Considerații generale privind teoria Vlasov-Uenling-Uhlenbeck

Ecuția Vlasov-Uenling-Uhlenbeck se poate folosi cu succes în studierea *efectelor de neechilibru și a efectelor cuantice*. În plus, ecuația Vlasov-Uenling-Uhlenbeck este o *ecuație integro-diferențială neliniară în spațiul fazelor cu 6 dimensiuni*. Din aceste cauze există dificultăți de rezolvare. Pentru limita clasică se face ipoteza că pot fi folosite *cuasiparticule*, iar pozițiile lor medii sunt soluții ale ecuațiilor Newton:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \quad (\text{III.46})$$

Prin introducerea *câmpului mediu, blocării Pauli (pentru stările finale), cinematicii relativiste și unor mecanisme de producere de particule* se obține teoria Vlasov-Uenling-Uhlenbeck pentru descrierea dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste.

O problemă importantă pe care trebuie să o rezolve teoria Vlasov-Uenling-Uhlenbeck este cea a *stabilității nucleelor în starea fundamentală*. O altă problemă de interes pentru obținerea unei soluții corecte este cea a determinării *câmpului nuclear mediu optim*. În acest mod este posibilă stabilirea corectă a *blocării Pauli pentru stările finale posibile*.

Pentru o descriere corectă a procesului producerii de particule și rezonanțe este necesară *sincronizarea ansamblurilor de nucleoni*. De asemenea, *se introduc secțiunile eficiente de împrăștiere experimentale* pentru descrierea corectă a procesului de producere de particule și nuclee ușoare.

Teoria Vlasov-Uenling-Uhlenbeck încearcă eliminarea considerării de două ori a câmpului mediu și a termenului de ciocnire. Se ia în considerare faptul că potențialul Skyrme fenomenologic, prin partea sa reală, atractivă, descrie schimbul de pioni (termen liniar), iar partea repulsivă este determinată de partea imaginară. În plus, la împrăștierea de două corpuri se adaugă și interacțiunile reziduale. Trebuie menționat aici faptul că în ciocnirile binare și în ansamblul de nucleoni total, mediat, sunt respectate legea

conservării energiei și legea conservării impulsului. Datorită *cuplajului dintre ansamblurile de nucleoni* cele două legi de conservare nu sunt respectate în fiecare ansamblu de nucleoni considerat separat.

O problemă de interes în teoria Vlasov-Uenling-Uhlenbeck este cea a corectării secțiunii eficace pentru a putea lua în considerare *efectele mediului nuclear* asupra proprietăților unor particule, rezonanțe și nuclee ușoare și *consecințele* pe care aceste efecte le au asupra unor fenomene și procese nucleare de interes produse în ciocniri nucleare la energii intermediare și înalte. Acest fapt este important pentru descrierea corectă a unor posibile tranziții de fază în materia nucleară aflată în condiții diferite de densitate și temperatură.

Este posibilă *blocarea stărilor finale permise* într-o ciocnire nucleară datorită *principiului de excludere al lui Pauli*. Frația de blocare Pauli pentru fiecare nucleon, într-o ciocnire nucleară dată, este definită de mărimea $(1 - f_i)$. De asemenea, *probabilitatea de împrăștiere* este redusă de *factorul Uenling-Uhlenbeck* definit astfel: $(1 - f_1)(1 - f_2)$. Trebuie spus că importanța blocării Pauli scade cu creșterea energiei pe nucleon. Astfel, la energii pe nucleon sub energia de legătură pe nucleon fracția de blocare Pauli poate atinge, pentru o ciocnire dată, la un parametru de ciocnire fixat, valori între 0.9 și 1.0. Pentru aceeași ciocnire, dar pentru energii pe nucleon peste energia de repaus a nucleonului valorile scad de la circa 0.3 pînă la aproape 0.0 (pentru energii pe nucleon foarte mari). Teoria Vlasov-Uenling-Uhlenbeck (teoria VUU) rămâne o cale utilă de investigare a dinamicii ciocnirilor nucleare relativiste.